8. Л а п т е в Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства // Тр. IУ Всесоюз. мат. съезда, 1961. Л.: Наука, 1964. Т.2. С.226-233.

9. Ш е в ч е н к о Ю.И. Связность в продолжении главного расслоения // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, 1991. Вып.22. С.117-127.

10. О с т и а н у Н.М. Ступенчато-расслоенные пространства // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т.5. С.259-309.

11. О с т и а н у Н.М., Р ы ж к о в В.В., Ш в е й к и н П.И. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.7-70.

12. Ш е в ч е н к о Ю.И. Связности в расслоениях, ассоциированных с пространством квадрик // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1986. Вып.17. С.97-102.

13. Ehresmann C. Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable // Colloque de Topologie. Bruxelles, 1950. P. 29-55.

14. Lumiste Ü. Connections in associated fibre bundles // Czech. Mat. J. 1981. V.31. №3. P. 421-432.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК С ТРЕХКРАТНОЙ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

С.В.Ш м е л е в а

(КВИМУ)

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются конгруэнции $\mathcal{K}_3^0$ невырожденных линейчатых квадрик с трехкратной невырождающейся в плоскость фокальной поверхностью (A_0) и другой неплоской фокальной поверхностью (A_3), асимптотические линии на которых соответствуют и огибаются прямолинейными образующими квадрики $Q\in\mathcal{K}_3^0$, причем точки A_1, A_2 пересечения прямолинейных образующих, проходящих через A_0 и A_3, полярно сопряжены относительно обеих ассоциированных квадрик Q_1, Q_2 [1, с.34]. Конгруэнции $\mathcal{K}_3^0$ разбиваются на три класса. Для каждого класса доказана теорема существования, исследованы фокальные многообразия и получены геометрические свойства ассоциированных прямолинейных конгруэнций.

1. Отнесем конгруэнцию $\mathcal{K}_3^0$ к реперу $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$. Тогда она удовлетворяет [2, с.106] системе уравнений Пфаффа конгруэнции невырожденных линейчатых квадрик с фокальными поверхностями (A_0) и (A_3):

$$\begin{cases} \omega_0^3=0,\ \omega_3^0=0,\ \omega_i^j=a_{ik}^j\omega^k,\ \omega_i^3-\omega^j=c_{ik}\omega^k, \\ \omega_i^0-\omega_3^j=\lambda_{ik}\omega^k,\ \omega_3^i=b_k^i\omega^k,\ \Omega=h_k\omega^k, \end{cases} \qquad (1.1)$$

в которой надо учесть свойства, характеризующие конгруэнции $\mathcal{K}_3^0$, и конечные соотношения:

$$c_{12}=c_{21},\ b_1^1\lambda_{12}-b_2^2\lambda_{21}+b_1^2\lambda_{22}-b_2^1\lambda_{11}=0. \qquad (1.2)$$

Здесь и в дальнейшем $i,j,k=1,2;\ i\neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится;

$$\omega^i \overset{def}{=} \omega_0^i,\ \Omega \overset{def}{=} \omega_0^0-\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3. \qquad (1.3)$$

В силу того, что поверхности (A_0) и (A_3) не вырождаются в плоскости, имеем:

$$1+c_{12}\neq 0,\ b_1^1b_2^2-b_1^2b_2^1\neq 0. \qquad (1.4)$$

Так как точки A_1 и A_2 полярно сопряжены относительно квадрики Q_i: $h_ix^1x^2-a_{ii}^j(x^i)^2-a_{ji}^i(x^j)^2+\lambda_{ki}x^kx^3+c_{ki}x^kx^0=0$, (1.5)

то

$$h_1=0,\ h_2=0. \qquad (1.6)$$

Учитывая, что прямолинейные образующие A_0A_i и A_3A_i квадрики $Q\in\mathcal{K}_3^0$ являются асимптотическими касательными поверхностей (A_0) и (A_3), получаем:

$$c_{11}=0,\ c_{22}=0,\ \lambda_{11}=0,\ \lambda_{22}=0. \qquad (1.7)$$

Соответствие асимптотических линий на поверхностях (A_0) и (A_3) разбивает конгруэнции $\mathcal{K}_3^0$ на два класса: конгруэнции ${}^{(1)}\mathcal{K}_3^0$ с непересекающимися соответственными асимптотическими касательными, характеризуемые соотношениями

$$b_1^1=0,\ b_2^2=0, \qquad (1.8)$$

и конгруэнции ${}^{(2)}\mathcal{K}_3^0$ с пересекающимися соответствующими касательными, для которых

$$b_1^2=0,\ b_2^1=0. \qquad (1.9)$$

Замыкая уравнение $\Omega=0$, находим

$$\lambda_{12}-\lambda_{21}+(1+c_{12})(b_1^1-b_2^2)=0. \qquad (1.10)$$

Условия трехкратности фокальной поверхности (A_0) (см. (2) в работе [2]) запишутся в виде:

$$\begin{cases} c_{12} a^2_{11} = 0, \quad c_{12} a^1_{22} = 0, \quad c_{12}\left((a^1_{21})^2 + a^2_{12} a^1_{22}\right) = 0, \\ c_{12}\left((a^2_{12})^2 + a^1_{21} a^2_{11}\right) = 0. \end{cases} \qquad (1.11)$$

2. Рассмотрим конгруэнцию ${}^{(1)}K^0_3$. Учитывая (1.8) в (1.10), получим:

$$\lambda_{12} = \lambda_{21} \overset{def}{=} \lambda_0 . \qquad (2.1)$$

В силу (1.4) можно так пронормировать вершины репера, чтобы

$$b^2_1 = 1, \quad b^1_2 = 1. \qquad (2.2)$$

Тогда

$$\omega^1_3 = \omega^2, \quad \omega^2_3 = \omega^1. \qquad (2.3)$$

Из (1.11) следует, что при

$$c_{12} \neq 0, \qquad (2.4)$$

получаем:

$$\omega^2_1 = 0, \quad \omega^1_2 = 0. \qquad (2.5)$$

Замыкая (2.5), находим:

$$c_{12}\, \omega^1 \wedge \omega^2 = 0 . \qquad (2.6)$$

Так как базисные формы ω^i линейно независимы, то приходим к противоречию с неравенством (2.4). Следовательно, для конгруэнции ${}^{(1)}K^0_3$ выполняется равенство

$$c_{12} = 0 . \qquad (2.7)$$

Уравнения (1.10) обращаются в тождества, а система (1.1) приводится к виду:

$$\begin{cases} \omega^3_0 = 0, \ \omega^0_3 = 0, \ \omega^j_i = a^j_{ii}\omega^i, \ \omega^3_i = \omega^j, \ \omega^0_i - \omega^j_3 = \lambda_0 \omega^j, \\ \omega^i_3 = \omega^j, \ \Omega = 0, \ d\lambda_0 + 2\lambda_0 \omega^0_0 = 0, \ 2(\omega^0_0 - \omega^i_i) = m_i \omega^i + a^j_{ii}\omega^j. \end{cases} \qquad (2.8)$$

Она определяет конгруэнции ${}^{(1)}K^0_3$ с произволом четырех функций одного аргумента.

Сравнивая систему (2.8) с уравнениями (1), (9), (14) работы [3], убеждаемся, что конгруэнции ${}^{(1)}K^0_3$ являются подклассом конгруэнций N'. Исключим из рассмотрения конгруэнцию квадрик Ли и конгруэнции с фокальными поверхностями (A_1) и (A_2). Тогда

$$a^2_{11} a^1_{22} \lambda_0 \neq 0. \qquad (2.9)$$

Т е о р е м а 2.1. Фокальными поверхностями конгруэнции ${}^{(1)}K^0_3$ являются: четырехкратная поверхность (A_0), поверхность (A_3) и поверхности (M_c), где $c = 0,1,2$, определяемые формулами:

$$M_c = \frac{\lambda_0 \varepsilon_c^2}{\sqrt[3]{a^2_{11} a^1_{22}}} A_0 + \sqrt[3]{a^1_{22}}\, A_1 + \varepsilon_c \sqrt[3]{a^2_{11}}\, A_2 + \frac{1}{\lambda_0}\sqrt[3]{(a^2_{11} a^1_{22})^2}\, A_3, \qquad (2.10)$$

причем

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} . \qquad (2.11)$$

– корни кубичные из единицы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система уравнений, определяющая фокальные точки квадрики $Q \in {}^{(1)}K^0_3$, имеет вид:

$$x^1x^2 - x^0x^3 = 0, \ \lambda_0 x^2 x^3 - a^2_{11}(x^1)^2 = 0, \ \lambda_0 x^1 x^3 - a^1_{22}(x^2)^2 = 0. \qquad (2.12)$$

Умножая последние два уравнения соответственно на x^1 и на x^2 и вычитая одно из другого, находим:

$$x^1 = \sqrt[3]{a^1_{22}}, \quad x^2 = \varepsilon_c \sqrt[3]{a^2_{11}} \qquad (2.13)$$

Откуда следует формула (2.10). Так как ${}^{(1)}K^0_3 \subset N' \subset N$ [3], то (A_0) – четырехкратная фокальная поверхность.

Т е о р е м а 2.2. Торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_0A_3) соответствуют; конгруэнция (A_0A_3) сопряжена поверхностям (A_0) и (A_3); фокусы луча $A_1A_2 \in (A_1A_2)$ и $A_0A_3 \in (A_0A_3)$ гармонически делят соответственно точки A_1 и A_2, A_0 и A_3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Уравнение торсов прямолинейных конгруэнций имеет вид:

$$(\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 = 0. \qquad (2.14)$$

2) Так как координатные линии $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$ на поверхностях (A_0) и (A_3) – асимптотические, то сеть линий (2.14) на них – сопряженная. 3) Фокусы лучей A_1A_2 и A_0A_3 являются точками $A_1 \pm A_2$ и $A_0 \pm A_3$.

Из 3) следует, что единичные точки ребер A_1A_2 и A_0A_3 канонического репера конгруэнции ${}^{(1)}K^0_3$ совмещены с одним из фокусов соответствующего луча.

3. Рассмотрим ${}^{(2)}K^0_3$. Если выполняется неравенство (2.4), то из (1.10) следует (2.5), причем замыкание уравнений (2.5) обращается в тождество. Продолжая уравнения

$$\omega^i_3 = b^i_i \omega^i, \quad \omega^0_i - \omega^j_3 = \lambda_{ij}\omega^j, \qquad (3.1)$$

находим:

$$\begin{cases} d\lambda_{ij} + 2\lambda_{ij}\omega^0_0 = (1 + c_0)\alpha_j \omega^j, \\ d b^i_i + 2 b^i_i \omega^0_0 = \alpha_i \omega^i \end{cases} \qquad (3.2)$$

Замыкая (3.2), приходим к соотношению:

$$(1 + c_{12})(b^1_1 - b^2_2) = 0, \qquad (3.3)$$

которое в силу (1.4), (1.10) дает:

$$b^1_1 = b^2_2, \quad \lambda_{12} = \lambda_{21} \overset{def}{=} \lambda_0 . \qquad (3.4)$$

Система уравнений Пфаффа этого подкласса конгруэнций ${}^{(2)}K^0_3$, который обозначим через ${}^{(2)}K^0_{3,1}$, приводится к виду:

$$\begin{cases} \omega^3_0 = 0, \ \omega^0_3 = 0, \ \omega^j_i = 0, \ \omega^3_i = (1 + c_0)\omega^j, \ \omega^0_i - \omega^j_3 = \lambda_0 \omega^j, \\ \omega^i_3 = \omega^i, \ \Omega = 0, \ \omega^0_0 = 0, \ d\lambda_0 = 0, \ dc_0 = 0, \ c_0 \neq 0 . \end{cases} \qquad (3.5)$$

Система – вполне интегрируема.

Рассмотрим теперь случай, когда для конгруэнции ${}^{(2)}\mathcal{K}_3^0$ выполняется равенство (2.7). Повторяя аналогичные рассуждения, приходим к системе:

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0, \ \omega_3^0 = 0, \ \omega_i^j = a_{ii}^j \omega^i, \ \omega_i^3 = \omega^j, \ \omega_i^0 - \omega_3^i = \lambda_0 \omega^j, \\ \omega_3^i = \omega^i, \ \Omega = 0, \ d\lambda_0 = 0, \ \omega_0^0 = 0, \end{cases} \qquad (3.6)$$

которая определяет подкласс ${}^{(2)}\mathcal{K}_{3,2}^0$ конгруэнций ${}^{(2)}\mathcal{K}_3^0$ с произволом двух функций одного аргумента. Конгруэнции ${}^{(2)}\mathcal{K}_{3,1}^0$ являются подклассом конгруэнций $\mathfrak{A}_1$, рассмотренных в [4], а конгруэнции ${}^{(2)}\mathcal{K}_{3,2}^0$, как и ${}^{(2)}\mathcal{K}_3^0$, являются подклассом конгруэнций $\mathcal{N}'$ [3]. Таким образом, доказана

Т е о р е м а 3.1. Существуют два и только два класса конгруэнций ${}^{(2)}\mathcal{K}_3^0$ – конгруэнции ${}^{(2)}\mathcal{K}_{3,1}^0$, определенные вполне интегрируемой системой (3.5), и конгруэнции ${}^{(2)}\mathcal{K}_{3,2}^0$, определяемые с произволом двух функций одного аргумента системой (3.6).

Обозначим

$$B = (1+\lambda_0)A_0 + (1+c_0)A_3, \quad C = A_0 - A_3. \qquad (3.7)$$

Т е о р е м а 3.2. Фокальные поверхности (A_1) и (A_2) конгруэнции ${}^{(2)}\mathcal{K}_{3,1}^0$ вырождаются в линии, лежащие в инвариантной плоскости (A_1A_2B); прямолинейная конгруэнция (A_0A_3) является связкой прямых с центром в точке C.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем:

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \omega^2 B, \ dA_2 = -\omega_1^1 A_2 + \omega^1 B, \ d(A_1A_2B) = 0, \ dC = 0.$$

Т е о р е м а 3.3. Фокальные поверхности (A_0) и (A_3) конгруэнции ${}^{(2)}\mathcal{K}_{3,1}^0$ являются линейчатыми квадриками и имеют кратность три.

Утверждение непосредственно вытекает из принадлежности ${}^{(2)}\mathcal{K}_{3,1}^0$ классу $\mathfrak{A}_1$ [3], для которого оно справедливо.

Так как уравнения, определяющие фокальные точки квадрики $Q \in {}^{(2)}\mathcal{K}_{3,2}^0$, совпадают с уравнениями (2.12) и так как ${}^{(2)}\mathcal{K}_{3,2}^0 \subset \mathcal{N}^1 \subset \mathcal{N}$ [3], справедлива

Т е о р е м а 3.4. Если квадрика $Q \in {}^{(2)}\mathcal{K}_{3,2}^0$ не является квадрикой Ли поверхности (A_0), то фокальными поверхностями конгруэнции ${}^{(2)}\mathcal{K}_{3,2}^0$ являются: четырехкратная фокальная поверхность (A_0), поверхность (A_3) и поверхности $(M_1), (M_2), (M_3)$, определяемые формулами (2.10).

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции линейчатых квадрик в трехмерном проективном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1977. Вып.8. С.32-42.

2. Ш м е л е в а С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с четырехкратной фокальной поверхностью // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1986. Вып.17. С.105-109.

3. М а л а х о в с к а я С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с кратной фокальной поверхностью // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1981. Вып.12. С.44-47.

4. Ш м е л е в а С.В. Конгруэнции $\mathfrak{A}$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, 1988. Вып.19. С.126-130.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ПАР КОНИК В A_3

Е.А.Щ е р б а к

(Калининградский государственный университет)

В данной статье продолжаются исследования специальных видов конгруэнций пар коник в трехмерном аффинном пространстве, начатые в [1]. Рассматриваются конгруэнции пар коник $\{F_1, F_2\}$, где коника F_1 имеет неподвижный центр, а коника F_2 проходит через центр коники F_1 и имеет центр, лежащий на конике F_1. Назовем такие конгруэнции коник конгруэнциями K.

Исследования проводятся в каноническом репере $R = \{A, \bar{e}_\alpha\}$, $(\alpha = 1,2,3)$, начало A которого совмещено с центром коники F_1, концы E_i векторов $\bar{e}_i$ $(i = 1,2)$ расположены на конике F_1 так, что векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ сопряжены относительно F_1, причем конец E_1 вектора $\bar{e}_1$ помещен в центр коники F_2, а конец E_3 вектора $\bar{e}_3$ – в точку пересечения двух касательных к конике F_2, одна из которых проведена в точке A, а вторая параллельна вектору $\bar{e}_1$. Уравнения коник F_1 и F_2 в выбранном репере имеют соответственно вид:

$$F_1: \quad (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0, \quad x^3 = 0; \qquad (1)$$

$$F_2: \quad (x^1 - 1)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0, \quad x^2 = 0. \qquad (2)$$

Система уравнений Пфаффа конгруэнции K записывается в виде: